LAGRANGE

- **Normalform** bilden (min u. ≤ 0)

F: max = -min

NB: $x+2y \geq 5 \Rightarrow -x-2y+5 \leq 0$

$x+2y \geq -5 \Rightarrow -x-2y-5 \leq 0$

$x+2y \leq 5 \Rightarrow x+2y-5 \leq 0$

$x+2y = 0 \Rightarrow x+2y = 0$

- **$L(x,y,\lambda)$ bilden**

$L = f(x) + \lambda(NB_1) + \mu(NB_2)$

- **Ableiten** nach x, y (L)
- **KKT** aufstellen

(1a) 'Abl.' nach $x = 0$ (1b) '' nach $y = 0$

(2a) $\lambda(NB_1) = 0$ (2b) $\mu(NB_2) = 0$

(3a) $NB_1 \leq 0$ (3b) $NB_2 \leq 0$

(4a) $\lambda \geq 0$ (4b) $\mu \geq 0$ (5a/b) $x, y \geq 0$

- **Fälle aufstellen** $\lambda > 0$, $NB_1 = 0$
- **Abarbeiten**

a) $Lx + Ly$ noch $= \lambda$ auflösen

b) Einsetzen des λ in die NB

c) Einsetzen der err. λ in $Lx + Ly$

d) Einsetzen des $x + y$ in die NB um zu sehen ob sie erfüllt ist.

d) Hesse Matrix berechnen

1. grad(f) bilden $\begin{pmatrix} \text{Abl n.x} \\ \text{Abl n.y} \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

2. Hesse bilden $\begin{pmatrix} (1) \text{ nach } x & (1) \text{ n. } y \\ (2) \text{ nach } x & (2) \text{ n. } y \end{pmatrix}$

3. Einsetzen der x und x wenn möglich

-> positiv definit: MIN

-> negativ '' : MAX

-> nicht definit SATTEL

Bsp $x^4 + y^4 - 5x^2 - 4y^2 + 5x + 2y - 15$

grad $\begin{pmatrix} 4x^3 - 10x + 5 \\ 4y^3 - 8y + 2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 12x^2 - 10 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 8 \end{pmatrix}}_{\text{Hesse}}$

NEWTON

$x_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ bei $x = 0$ bis $\leq 10^{-5}$

Bsp: $f(x) = x^4 - 5x^2 - 5x - 25$

a) ableiten $f'(x) = 4x^3 - 10x + 5$

$x_{k+1} = x_k - \frac{x^4 - 5x^2 + 5x - 25}{4x^3 - 10x + 5}$

b) Tabelle erstellen

K	XK	f(xk)	f'(xk)	XK+1
0	0	-25	5	0.5
1	0.5	-1.1875	0.5	2875

usw. bis $f(x) \leq 10^{-5}$

- Stationäre Punkte

$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$

GRAPHEN

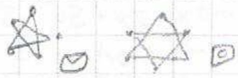
- Eulertour: ungerichtet => zusammenhängend und Knoten haben geraden Grad
gerichtet: Eingangs- und Ausgangsgr. gleich
Suche nach Hierholzer
- Tour: start bei vo, Ende bei vo
- Zug: alle Kanten, Ende egal
- Multigraph: mehrere Kanten
- gerichtet: Pfeile an Kanten
- Hypergraph: Kanten verb. mehr als 2 Knd.
- Bipartit: kein Kreis ungerader Länge
kreisfrei = bipartit
zusammenhang nicht notwendig
- vollst. Graph 
- Handshake: in jedem Graph Anzahl d. Ecken unger. Grades gera

ABLEITUNGEN

- Produkt $f(x) = u(x) \cdot v(x)$

$\Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

$f(x) = x^3 \cdot \sin(x) \Rightarrow 3x^2 \cdot \sin(x) + x^3 \cdot (\cos(x))$

- Zusammenhang  nein, da ein v zu einem w keinen weg enth.

RELATONEN 2

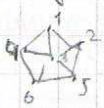
$(m,n) \in R \underset{\text{sym}}{\Rightarrow} (n,m) \in R \underset{\text{trans.}}{\Rightarrow} (m,m) \in R$

$\underbrace{\qquad}_{\text{reflexiv}}$

BÄUME

- Pflanzung rekursiv definiert, dass die Teilbäume die durch die direkten Nachf. eines Knotens def. sind nach ihrem Code lexikogr. von li. nach re sortiert sind
- Exzent. $\max_{w \in V} dist(v,w)$
- Ein Baum ist ein Graph ohne Kreis

Adjazenzmatrix (raph)



0111000
1010100
1101111
1010010
011001
001010

FIBONACCI

$f(x) = x^2 - 82x + 1681$ bei 7 Iterationen auf $[0, 89]$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

$N = 7$; $k = 0$; $a_0 = 0$; $b_0 = 89$

$x_k = a_k + \frac{F_{N+1-k}}{F_{N+3-k}} \times (b_k - a_k)$

$y_k = a_k + \frac{F_{N+2-k}}{F_{N+3-k}} \times (b_k - a_k)$

$f(x_0) < f(y_0)$: $a_1 = a_0$, $b_1 = y_0$

$f(x_0) > f(y_0)$: $a_1 = x_0$, $b_1 = b_0$

$x_0 = a_0 + \frac{F_{7+1-0}}{F_{7+3-0}} (b_0 - a_0) \Rightarrow 0 + \frac{34}{89}(89) = 34$

$y_0 = a_0 + \frac{F_{7+2-0}}{F_{7+3-0}} (b_0 - a_0) \Rightarrow 0 + \frac{55}{89}(89) = 55$

$f(34) = 49 < f(55) = 196 \Rightarrow a_1 = 0 (a_0), b_1 = 55 (y_0)$

GOLDENER SCHNITT

$L_1 = y - a$, $L_2 = b - y$

$x_k = a_k + \frac{3 - \sqrt{5}}{2} (b_k - a_k)$

$y_k = a_k + \frac{\sqrt{5} - 1}{2} (b_k - a_k)$

Kürzeres Teilstück verhält sich zum längeren wie längeres zur gesamten Strecke

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2 \ldots\}$

$\mathbb{Z} = \{-2, -1, 0, 1 \ldots$

$\mathbb{Q}$ = Bruch

$\mathbb{R} = \{-2, 1, \sqrt{2}, e, \ldots$

$\mathbb{C}$ = komplexe z.

Hexadezimal

0 - 9, A - F

PERMUTATIONEN

- **disjunkte Mengen**

$A(123), B(456), A \cap B = \emptyset$

- $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 6 & 7 & 1 & 4 & 3 & 9 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

$n!$ Permut. !n fixp. Per.

- **Paarweise disjunkt**

$\langle 1 8 2 6 3 7 9 5 4 \rangle$

- **Transpositionen : 2**

$\langle 18 \rangle \langle 82 \rangle \langle 26 \rangle \langle 63 \rangle \langle 37 \rangle$
$\langle 79 \rangle \langle 95 \rangle \langle 54 \rangle$ Id n gesch.

- **Verkettung** $(1234) \circ (2345)$

x	$g(x)$	$f(g(x))$
2	3	4
4	5	5
5	2	3
3	4	1
1	1	2

P. Matrix

$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & = 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & = 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & = 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & = 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & = 1 \end{matrix}$

UMRECHNUNG

- **In dezimal** bringen

$10_{(8)}$ in dez

$1 \cdot 8^1 = 8;\ 0 \cdot 8^0 = 0 \} 8$

Teil vor und nach, getrennt

- **Umrechnen** in System

8 in 7er

$8 \div 7^1 = 1$ Rest 1

$1 \div 7^0 = 1$ Rest 0, usw

Nach, mit n^{-1} weiter

INKLUSION

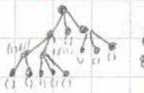
- **min A oder B**: $A \cup B$
- **A und B**: $A \cap B$

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

$|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D|$

BÄUME

- **Zentrum** = min Exzentr. (max (dist))
- **Aufsp. Baum**: greedy / Jarnik
- Stabile Hochz. n. Gale + Shapley
- **Baumcode** ((((()())(()()()))(()(()()())))



- **gepfl. Baum**: Ausdruck wohlgeklammert.
- **Wurzelbaum**: + lexikogr.
- **Baum**: + Wurzel ok.

- **Pflanzung**: Knoten aufst. von links nach rechts lexikogr. sortiert.
- Max Match: "König + Egervary"
- Perf Match: alle Knoten gematcht.
- Heiratssatz v. Hall

* gibt es 2 Knoten, so ist der mit dem kl. Code die Wurzel

SIMPLEX

a) **ZF**:
- min $2x + 5y + 5z$
- max $-2x - 5y - 5z$
- max $2x + 5y + 5z$ (bleibt)

b) **NB**
$\leq \rightarrow +yA \quad | \quad = \rightarrow +s1$
$\geq \rightarrow -yA + s1$

BSP:
- $2x + y \leq 4 \Rightarrow 2x + y + yA = 4$
- $-x - y \geq 1 \Rightarrow -x - y - yA + s1 = 1$
- $x - y - z = 1 \Rightarrow x - y - z + s1 = 1$
- $5x - 2y \geq -38 \Rightarrow -5x + 2y + yA = 38$

c) **Primales + Duales Problem**

$3x + 4y + 5z$

$\begin{matrix} x & + & 3y & + & 2z & \leq & 5 \\ 2x & + & y & + & 4z & \leq & 11 \\ 2x & + & 4y & + & 3z & \leq & 8 \\ & & x,y,z & & & \geq & 0 \end{matrix} \Rightarrow$

$5y_1 + 11y_2 + 8y_3$

$y_1 + 2y_2 + 2y_3 = 3$
$3y_1 + y_2 + 4y_3 = 4$
$2y_1 + 4y_2 + 3y_3 = 5$

d) **Tableau Phase 1**

D1/0	x y yA yB yC s1	x	x/f
yA yB yC	Nebenbedingungen		
δ1	δ1 = Zielfunkt.		
δ2	δ2 = Hilfsfunkt (alle pos. s1 - Zeilen)		

e) **Rechnen bis δ2-Werte ≤ 0**

f) **δ2 + s1 Zeile/Spalte entfernen**

g) **Endwert** bei **max** mit **(-1)** sonst ok

CHOLESKY

2x2 =
$r_{11} = \sqrt{a_{11}}$
$r_{12} = 1/r_{11} \cdot (a_{12})$
$r_{22} = \sqrt{(a_{22} - r_{12}^2)}$

3x3 =
$r_{11} = 2 \times 2$
$r_{12} = 2 \times 2$
$r_{13} = 1/r_{11} \cdot (a_{13})$
$r_{22} \quad 2 \times 2$
$r_{23} = 1/r_{22} \cdot (a_{23} - (r_{12} \cdot r_{13}))$
$r_{33} \quad \sqrt{(a_{33} - (r_{13}^2 + r_{23}^2))}$

transponieren

INDUKTION

- Behauptung $\sum_{k=1}^{n} (4k-2) = 2n^2$
- zu Beweisen $\sum_{k=1}^{n+1} (4k-2) = 2(n+1)^2$
- Anfang für $n = 1$
- Schritt: $\sum_{k=1}^{n+1} (4k-2) = \sum_{k=1}^{n} (4k-2) + 4(n+1) - 2$

$= 2n^2 + 4(n+1) - 2$

...

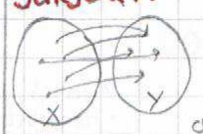
RELATIONEN

- **reflexiv** xRx $\leq$ da $x \leq x$; $=$ da $x = x$; $(1,1) \rightarrow (1,1)$
- **irreflexiv** xRx $<$ da nie $x < x$; $\neq$ " $x \neq x$
- **symm.** xRy $=$ da $x = y \Leftrightarrow y = x$; $(3,2) \rightarrow (2,3)$; $(xRy \Leftrightarrow yRx)$
- **transitiv** $xRy \wedge yRz \Rightarrow Rz$

z.B. $<$ auf $\mathbb{R}$, da $x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$

- **nicht trans**: $(2,3), (3,4) \not\Rightarrow (2,4)$

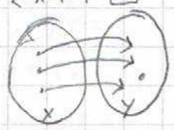
SURJEKTIV



Jeder Punkt in Y wird von einem Pfeil getroffen. Alle Werte aus Y werden als Funktionsw. angenommen.

$2x + 1$ ☑ $\quad x^2$ auf $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ☒

INJEKTIV

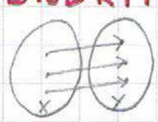


Jeder Punkt in Y wird max 1x angenommen.

$x \rightarrow 2x \ (\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ ☑

$(x\ u\ -x$ auf $x^2)$ $x \rightarrow x^2$ (") ☒

BIJEKTIV



Jedes x hat genau 1x y als Funkt. Wert

$x \rightarrow x^2 \ (\mathbb{R}^+_0 \rightarrow \mathbb{R}^+_0)$ ☑

WAHRSCHEINLICHKEITEN

- **2 aus 4** $\binom{4}{2} = \frac{12}{6} = 6$ Kombo $\frac{1}{6}$ Chance
- unabhängig $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$
- A vorrausg. B: $P(A|B) = P(A \cap B) \div P(B)$

$1/4$ ziehen einer Herzkarte (A)
$1/2$ " roten Karte (B)
$\} \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$

- **Erwartungswert** $E(x) = \sum_{i=1} i \cdot (x)$

x = Wahrsch. dass x passiert

- **Varianz** $V(E(x)) = (x - E(x)^2)$

Bsp Würfel, Erw Wert = 3.5

$(1-3.5)^2 + (2-3.5)^2 + (3-3.5)^2 \ldots \cdot 1/6 = 2.961$

L/U-ZERLEGUNG

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & 12 & 15 \\ 3 & 16 & 29 & 35 \\ 4 & 23 & 46 & 65 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 20 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 49 \end{bmatrix}}_{\text{UPPER}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{LOWER}}$

$b = (1, 13, 26, 49)$

LOWER: $\begin{matrix} 1 \\ 13 \\ 26 \\ 49 \end{matrix}$ $Lc = b$, $c = (1, 11, 1, 10)$

UPPER: $\begin{matrix} 1 \\ 11 \\ 1 \\ 10 \end{matrix}$ $Ux = c$, $x = (-4, 2, -1, 1)$

x löst LGS

CONDITIONS

$\|A\|_\infty$ = maximale Zeilensumme
$\|A\|_1$ = maximale Spaltensumme
} Einträge $|x|$

- $cond(A)_{1/\infty} = \|A\|_{1/\infty} \cdot \|A^{-1}\|_{1/\infty}$

a) Inverse erstellen $\begin{matrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{matrix} \left| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right.$

b) Spalten- / Zeilen-Summe berechnen: max(Zeile) = $\|A\|_\infty$; von A und A^{-1} max(Spalte) = $\|A\|_1$

c) $cond(A) > 1$ = schlecht