KE 7 Zusammenfassung
"Lineare Optimierung"

Simplex Algorithmus

1. Das Problem wird in Normalform gebracht

<u>A) Zielfunktion</u>
Das Problem wird immer in Maximierungsform dargestellt. Ein Problem in Minimierungsform wird einfach mit (-1) multipliziert.

Beispiel:

Min 2x+5y+5z	→	Max -2x-5y-5z
Max -2x+y	→	Max -2x+y

<u>B) Nebenbedingungen</u>
Die nebenbedingungen werden in Gleichungsform überführt. Generell ist die Vorgehensweise wie folgt:

Bei $\leq$	→	+yA
Bei $\geq$	→	-yA +s1
Bei $=$	→	+s1

Dabei ist zu beachten, dass als Ergebnis keine negativen Zahlen stehen dürfen. Ist hinter dem Gleichheitszeichen/Ungleichheitszeichen ein negativer Wert, so wird die Un-/Gleichung mit (-1) multipliziert. Dabei dreht sich das $\leq$ oder $\geq$ entsprechend, das = bleibt. Dann wird eine Schlupfvariable (yA) und eine Hilfsvariable (s1) eben addiert oder subtrahiert um aus der Ungleichung eine Gleichung zu machen.

Beispiel:

2x+y $\leq$ 4	→	2x+y +yA = 4
-x+y $\geq$ 1	→	-x+y-yA +s1 = 1
x-y-z=1	→	x-y-z+s1 = 1
5x-2y $\geq$ -38	→	-5x+2y +yA = 38

<u>C) Duales Problem (wenn nötig).</u> Beispiel:

Primales Problem

3x+	4y+	5z	
x+	3y+	2z	$\leq$ 5
2x+	y+	4z	$\leq$ 11
2x+	4y+	3z	$\leq$ 8
	X,	y	$\geq$ 0

Duales Problem

5y1+11y2+8y3		
y1+2y2+2y3	=	3
3y1+y2+4y3	=	4
2y1+4y2+3y3	=	5

2. SIMPLEX Starttableu aufstellen

<u>A) Anhand der Normalform wird das Starttableu aufgestellt.</u> Beispiel:

Anfangsform		Normalform
Max 2x+y	→	Max 2x+y
x+y $\leq$ 16	→	x+y+yA = 16

-3x+y $\geq$ 12	$\rightarrow$	-3x+y-yB+s1 = 12
5x-2y $\geq$ -38	$\rightarrow$	-5x+2y+yC=38
X,y $\geq$ 0	$\rightarrow$	X,y $\geq$ 0

Nun wird anhand der Normalform das 1. Simplextableu aufgestellt. Da eine Schlupfvariable (yB) negativ ist, ist das ein Phase 1 Tableu. δ_1 Bildet die Zielfunktion, δ_2 die Hilfsfunktion. Diese wird gebildet indem man alle Zeilen mit positiver Hilfsvariable (s1) addiert.

P1/0	x	y	yA	yB	yC	s1	x	x/f	
yA	1	1	1	0	0	0	16	16	
yB	-3	**1**	0	-1	0	1	12	12	◄
yC	-5	2	0	0	1	0	38	18	
δ_1	2	1	0	0	0	0	0		
δ_2	-3	1	0	-1	0	0	12		
		▲							

<u>B) Die Auswahl der Pivotspalte</u> geschieht nach folgenden Regeln. Zunächst die Spalte, wo bei einer Zelle in δ_2 (Hilfsfunktion) der erste positive Wert steht (δ_2 , Spalte 2 mit dem Wert "1"). Dann sucht man sich die Zeile mit einem positiven Wert und teilt den x-Wert in dieser Zeile durch den positiven Wert und trägt die Werte in Spalte x/f ein. Die Zeile mit dem niedrigsten Wert beinhaltet den Pivotwert (1).

<u>C) Nun wird das 2. Tableu aufgestellt</u> indem man zunächst die Pivotzeile durch das **Pivotelement (1)** dividiert. Diese bildet die neue **Pivotzeile** im nächsten Tableu.
Für die anderen Zeilen geht man wie folgt vor: man subtrahiert vom alten **Zeilenwert** (**altes Spaltenpivot***neues Zeilenpivot**). Ergebnis ist die gleiche Zeile in der neuen Tabelle. Rechnung:

1/yA							1/yC							1/delta_1							1/delta_2						
1	-(	1	*	-3	)=	4	-5	-(	2	*	-3	)=	1	2	-(	1	*	-3	)=	5	-3	-(	1	*	-3	)=	0
1	-(	1	*	1	)=	0	2	-(	2	*	1	)=	0	1	-(	1	*	1	)=	0	1	-(	1	*	1	)=	0
1	-(	1	*	0	)=	1	0	-(	2	*	0	)=	0	0	-(	1	*	0	)=	0	0	-(	1	*	0	)=	0
0	-(	1	*	-1	)=	1	0	-(	2	*	-1	)=	2	0	-(	1	*	-1	)=	1	-1	-(	1	*	-1	)=	0
0	-(	1	*	0	)=	0	1	-(	2	*	0	)=	1	0	-(	1	*	0	)=	0	0	-(	1	*	0	)=	0
0	-(	1	*	1	)=	-1	0	-(	2	*	1	)=	-2	0	-(	1	*	1	)=	-1	0	-(	1	*	1	)=	-1
16	-(	1	*	12	)=	4	38	-(	2	*	12	)=	14	0	-(	1	*	12	)=	-12	12	-(	1	*	12	)=	0

Die Ergebniswerte sind die neuen Zeilen im neuen Tableau. Dabei werden dann yB und y "im Kopf" vertauscht.

			yB						
	P1/1	x	y	yA	yB	yC	s1	x	x/f
	yA	4	0	1	1	0	-1	4	
y	yB	-3	1	0	-1	0	1	12	
	yC	1	0	0	2	1	-2	14	
	δ_1	5	0	0	1	0	-1	-12	
	δ_2	0	0	0	0	0	-1	0	

Das ganze geht so lange, bis in der Zeiler der Hilfsfunktion δ_2 keine positiven Werte mehr sind. In diesem Fall ist es bereits jetzt soweit. Somit ist es das Endtableau für Phase 1. Wir beginnen mit

D) dem Aufstellen des Starttableaus für Phase 2

Hier werden nun die Hilfsfunktions-Zeile δ_2 und die Hilfsvariablenspalte (s1) gelöscht. Das bringt uns zu folgendem Starttableau für Phase 2.

			yB						
	P2/0	x	y	yA	yB	yC	x	x/f	
	yA	**4**	0	1	1	0	4	1	◄
y	yB	-3	1	0	-1	0	12		
	yC	1	0	0	2	1	14	14	
	δ_1	5	0	0	1	0	-12		
		▲							

Wir wählen die Pivotspalte und Zeile wieder wie gehabt und führen wieder die übliche Rechnung durch.

1/yB	1/yC	1/delta_1
-3 -(-3 * 1)= 0	1 -(1 * 1)= 0	5 -(5 * 1)= 0
1 -(-3 * 0)= 1	0 -(1 * 0)= 0	0 -(5 * 0)= 0
0 -(-3 * 1/4)= 3/4	0 -(1 * 1/4)= -1/4	0 -(5 * 1/4)= -5/4
-1 -(-3 * 1/4)= -1/4	2 -(1 * 1/4)= 7/4	1 -(5 * 1/4)= -1/4
0 -(-3 * 0)= 0	1 -(1 * 0)= 1	0 -(5 * 0)= 0
12 -(-3 * 1)= 15	14 -(1 * 1)= 13	-12 -(5 * 1)= -17

Die Rechnung führt uns zu folgender, 1. Tabelle von Phase 2:

		yA	yB					
	P2/1	x	y	yA	yB	yC	x	x/f
x	yA	1	0	1/4	1/4	0	1	
y	yB	0	1	3/4	-1/4	0	15	
	yC	0	0	-1/4	7/4	1	13	
	δ_1	0	0	-5/4	-1/4	0	-17	

Nun stehen nur negative Werte in der Zielfunktionszeile δ_1 . Wir können also die Lösung #

x=1
y=15

mit einem Funktionswert von

f(x,y) = 17

ablesen. Wäre es eine **Minimierungsaufgabe**, so müsste man den Funktionswert -17 nicht mit (-1) multiplizieren. Der Funktionswert wäre dann -17.

Bland's Rule	Wählen Sie zunächst die Spalte mit dem kleinsten Index, wenn mehrere infrage kommen. Dann wählen Sie die Zeile mit dem kleinsten Index wenn mehrere infrage kommen.